ფუნქციის წარმოებულის გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

მაკა ლომთაძე
განათლების აკადემიური დოქტორი, ქუთაისის უნივერსიტეტის
ასოცირებული პროფესორი, საქართველო
maka.lomtadze@unik.edu.ge

საკვანძო სიტყვები: ფუნქციის წარმოებული; ფუნქციის ექსტრემუმი: მაქსიმუმი, მინიმუმი; დანახარჯი; ამონაგები.
J.E.L. classification: A2; C1; C4; DOI: https://doi.org/10.52244/ep.2021.21.09

ციტირებისთვის: ლომთაძე მ., (2021) ფუნქციის წარმოებულის გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში. ეკონომიკური პროფილი №1(21), გვ. 93–99. DOI: https://doi.org/10.52244/ep.2021.21.09

ანოტაცია. *სპეციალისტის პროფესიული მომზადებაბევრიფაქტორისგათვალისწინებით უნდა განხორციელდეს. გამოკვლევებმა აჩვენა რომ, საქართველოში დღეს არსებული მდგომარეობა არ შეესაბამება საბაზრო მოთხოვნების დონეს, რადგან სპეციალისტების ნაწილი ვერ ფლობს იმ პროფესიულ ცოდნას, რაც საჭიროა ეკონომიკური ამოცანების გადასაჭრელად. ამ პრობლემის მოგვარების ერთი მიმართულებაა ახალგაზრდა სპეციალისტთა მომზადება უმაღლეს სასწავლებელში. ახალგაზრდა თაობას უნდა მივცეთ საბაზისო ცოდნა და სწავლის პროცესი უნდა გავხადოთ საინტერესო რათა ჩამოყალიბდნენ მაღალ პროფესიონალებად.*

აღნიშნულიდან გამომდინარე უნდა ვიზრუნოთ ერთიან საგანმანათლებლო სივრცის შექმნაზე, სადაც უმაღლესი მათემატიკის როლი საკმაოდ დიდია. სწორედ ეს არის წარმოდგენილი სტატიის მიზანი.

შესავალი

დღევანდელ სიტუაციაში თანამედროვე სპეციალისტს, მრავალ სხვა პრობლემასთან ერთად, ხშირ შემთხვევაში უხდება არასტანდარტული ამოცანების გადაწყვეტა. სპეციალისტის ხარისხის შეფასების ერთ-ერთ კრიტერიუმად სწორედ არასტანდარტული ამოცანის ამოსახსნელად გამოჩენილი უნარი, დამოუკიდებელი მუშაობის დაგეგმვისა და პროგნოზირების შესაძლებლობა უნდა მივიჩნიოთ. თუ ამ საკითხს მეცნიერული თვალსაზრისით მივუდგებით, უნდა ვიფიქროთ სტუდენტის აღზრდის პროცესში არასტანდარტული სიტუაციების ხელოვნურად შექმნაზე. ეს მიდგომა წარმოადგენს ცოდნის შეძენის ტრადიციული ფორმიდან თვითორგანიზების ფორმაზე გადასვლას. რაც სტუდენტს უვითარებს ინდივიდუალურად მუშაობის უნარს.

მათემატიკური მეთოდები ეკონომიკაში აქტიურად გამოიყენება. უფრო მეტიც, ეკონომიკური პროცესები იმდენად რთულია და მრავალფეროვანი, რომ მათი აღწერა და მართვა თანამედროვე მათემატიკის მძლავრი აპარატის გამოყენების გარეშე შეუძლებელია.

სტატიაში დაწვრილებითაა ამოხსნილი და გაანალიზებული რამოდენიმე ეკონომიკური ამოცანა ფუნქციის წარმოებულის გამოყენებით, რაც სტუდენტებს ახალისებს და მასალაც ადვილად ასათვისებელი ხდება

ძირითადი ნაწილი

ფუნქციის წარმოებული შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ცვლილების სიჩქარე. კერძოდ, თუ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ გაყოფილ სხვაობას წარმოვადგენთ, როგორც f-ის ცვლილების სიჩქარეს x-დან x+h-მდე ინტერვალზე, მაშინ ამ გამოსახულების ზღვარი, როცა $h \to 0$ შეგვიძლია ჩავთვალოთ სიჩქარედ, რომლითაც f იცვლება x წერტილში. განსაზღვრება: x-ის მიმართ f ფუნქციის ცვლილების მყისი სიჩქარე x_0 წერტილში ეწოდება $f^{/}(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ წარმოებულს, თუ კი ის არსებობს. (Thomas, Weir, Hass 2014:74)

ამოცანა 1: დავუშვათ, რომ გარკვეული პროდუქციის წარმოების ზრდა დროის რაღაც მონაკვეთში აღიწერება ფუნქციით

$$u(x)=200+2x+x^2$$

ხოლო მოსახლეობის რაოდენობის ზრდა აღიწერება შემდეგი ფუნქციით:

$$v(x)=1500+20x+3x^2$$

სადაც x არის საწყისი პერიოდიდან წლების რაოდენობა, მაშინ ამ პროდუქციის წარმოება ერთ სულ მოსახლეზე მოიცემა ფუნქციით:

$$y=\frac{200+2x+x^2}{1500+20x+3x^2}$$

ვიპოვოთ პროდუქციის წარმოების ზრდის სიჩქარე.

ამოხსნა: პროდუქციის წარმოების ზრდის სიჩქარის საპოვნელად გავაწარმოოთ y ფუნქცია:

$$y'=\frac{(200+2x+x^2)'(1500+20x+3x^2)}{(1500+20x+3x^2)^2}-$$

$$-\frac{(1500+20x+3x^2)(200+2x+x^2)}{(1500+20x+3x^2)^2}$$

$$=\frac{-1000+1840x-26x^2}{(1500+20x+3x^2)^2}$$

აქედან ცხადია, რომ, როდესაც $x=0$ მაშინ $y'<0$, ე.ი. საწყის პერიოდში ერთ სულ მოსახლეზე პროდუქციის წარმოება კლებულობს,მაგრამ უკვე როდესაც $x=1$,ანუ 1 წლის შემდეგ $y'>0$, რაც იმას ნიშნავს რომ ერთი წლის შემდეგ პროდუქციის წარმოება ერთ სულ მოსახლეზე მატულობს.

ვთქვათ $K(X)$ არის მთლიანი დანახარჯების ფუნქცია, რომელიც აღწერს წარმოების დანახარჯებს X მოცულობის პროდუქციის დასამზადებლად. მაშინ სიდიდე $\mathrm{k}(X)=\dfrac{K(X)}{X}$ გამოსახავს საშუალო დანახარჯს, რომელიც პროდუქციის ერთეულის წარმოებისთვისაა საჭირო. გამოვიკვლიოთ ეს ფუნქცია.პრაქტიკაში დიდი მნიშვნელობა აქვს პროდუქციის იმ მოცულობის განსაზღვრას, რომლის დროსაც საშუალო დანახარჯი მინიმალურია. ამისათვის საჭიროა შევისწავლოთ საშუალო დანახარჯის ფუნქცია მის ექსტრემუმზე. ანუ გავაწარმოოთ მოცემული ფუნქცია, გავუტოლოთ ნულს და ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები:

$$\mathrm{k}^{/}(X)=\left(\frac{K(X)}{X}\right)^{/}=\frac{K^{/}(X)X-K(X)}{X^2}$$

$$K^{/}(X)X-K(X)=0 \tag{1}$$

$$K^{/}(X)=\frac{K(X)}{X}$$

ვთქვათ X_0 წარმოადგენს (1) განტოლების ამონახსნს და დავუშვათ

$XK^{/}(X) - K(X) < 0$ როცა $X < X_0$

$XK^{/}(X) - K(X) > 0$ როცა $X > X_0$

$K^{//}(X_0) > 0$

ცხადია X_0 წერტილი წარმოადგენს $K(X)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილს. და თუ გავითვალისწინებთ რომ $K^{/}(X)$ წარმოადგენს მარგინალურ დანახარჯს დავასკვნით:

თუ X_0 მოცულობის პროდუქციის წარმოების დროს საშუალო დანახარჯების ფუნქცია იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, მაშინ ამავე მოცულობისთვის მარგინალური დანახარჯი საშუალო დანახარჯის ტოლია.

ამოცანა 2: პროდუქციის X მოცულობის წარმოებისთვის ფირმა გეგმავს დანახარჯს, რომელიც გამოითვლება ფორმულით $K(X) = 2600 + 2\mathrm{X} + 0,001\mathrm{X}^2$

პროდუქციის წარმოების რა მოცულობისთვის იქნება საშუალო დანახარჯი ყველაზე მცირე? ვიპოვოთ ამ მცირე დანახარჯის რიცხვითი მნიშვნელობა.

ამოხსნა: პირველ რიგში გავაწარმოოთ მოცემული ფუნქცია, გაუტოლოთ ნულს და ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები:

$$K^{/}(X) = -\frac{2600}{\mathrm{X}^2} + 0,001 = 0$$

$$X^2 = 2600000$$

$$X = \pm\sqrt{2600000}$$

ჩვენთვის საინტერესო კრიტიკული წერტილი იქნება $X_0 = \sqrt{2600000} \approx 1612$

ცხადია $K^{//}(X_0) = \dfrac{5200}{\mathrm{X}_0^3} > 0$

ამიტომ ნაპოვნი X_0 მნიშვნელობა არის $K(X)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი.

მაშასადამე, საშუალო დანახარჯის მოცემული ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს, როდესაც პროდუქციის წარმოების მოცულობა $X_0 = 1612$ ერთეულს და ეს მნიშვნელობა ტოლია:

$$k(X_0) = \frac{K(X_0)}{X_0} \approx \frac{2600}{1612} + 2 + 0.001 \cdot 1612 \approx 5.22$$

რომელიც წარმოადგენს მარგინალურ დანახარჯს X_0 მოცულობის პროდუქციის წარმოებისას. (ჯეიმზი,2001:892).

წარმოებული აგრეთვე კარგად გამოყენება მარკეტინგში ამოცანების ამოსახსნელად. პრაქტიკაში მნიშვნელოვანია ვიპოვოთ გასაყიდი პროდუქციის ის რაოდენობა, რომლისთვისაც მოგების $\mathrm{P}(x)$ ფუნქცია მაქსიმალურია. ამ ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა მოვძებნოთ $\mathrm{P}(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმი, ამისათვის საჭიროა კრიტიკული წერტილების პოვნა. (ხვედელიძე, 2014:214)

როგორც ვიცით $\mathrm{P}(x) = \mathrm{R(x)} - \mathrm{C(x)}$, სადაც $\mathrm{R(x)}$ არის მთლიანი ამონაგების ფუნქცია, ხოლო $\mathrm{C(x)}$ _მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია, ამიტომ $\mathrm{P}(x)$-ის კრიტიკული წერტილის მოსაძებნად განვიხილოთ წარმოებული

$$\mathrm{P}^{'}(x) = \mathrm{R}^{'}(\mathrm{x}) - \mathrm{C}^{'}(\mathrm{x}) = 0 \qquad (2)$$

ამ განტოლებიდან ვთქვათ, რომ x_0 არის ისეთი კრიტიკული წერტილი, რომ $P^{'}(x) > 0$ როცა $x < x_0$ და $P^{'}(x) < 0$ როცა $x > x_0$; ანუ $\mathrm{P}^{''}(x_0) = \mathrm{R}^{''}(\mathrm{x}_0) - \mathrm{C}^{''}(\mathrm{x}_0) < 0$

ამ დროს x_0 არის $\mathrm{P}(x)$ ფუნქციის მაქსიმალური წერტილი და $\mathrm{P}(x_0)$ წარმოადგენს მოგების ფუნქციის მაქსიმალურ მნიშვნელობას. (2) ფორმულიდან გვაქვს: $\mathrm{R}^{'}(\mathrm{x}) = \mathrm{C}^{'}(\mathrm{x})$

ე.ი თუ x_0 წარმოადგენს მოგების ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილს, მაშინ ამ x_0 მნიშვნელობისთვის მარგინალური ამონაგების

ფუნქცია უდრის მარგინალური დანახარჯის ფუნქციას:

$$R'(x_0)=C'(x_0) \qquad (3)$$

და ამავე დროს $R''(x_0)<C''(x_0)$ (4)

(გ. ჯეიმზი, მათემატიკა ინჟინრებისათვის, თბილისი, 2001,გვ. 343)

ამოცანა 3: პროდუქციის რა რაოდენობა უნდა გაიყიდოს, რომ ფირმის მოგება იყოს მაქსიმალური, თუ ცნობილია წარმოებულის დანახარჯების ფუნქცია:

$$C(x)=2400+6x-\frac{x^2}{200}$$

და ამონაგების ფუნქცია: $R(x)=60x-\dfrac{x^2}{20}$

ამოხსნა: ვიპოვოთ მაქსიმალური მოგების სიდიდე იმ x_0 წერტილის მოსაძებნად, სადაც მოგების ფუნქცია $P(x)=R(x)-C(x)$ მიაღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. გამოვიყენოთ (3) და (4) ფორმულები და გამოვთვალოთ

$R'(x)=60-\dfrac{x}{10}$ და $C'(x)=6-\dfrac{x}{100}$

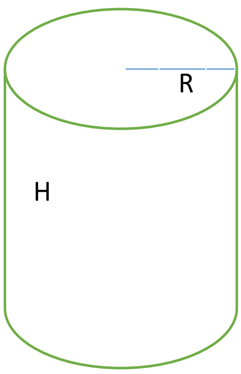
(3)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$60-\frac{x}{10}=6-\frac{x}{100}$$

$$\frac{x}{10}-\frac{x}{100}=60-6$$

$$\frac{9}{100}x=54$$

$$x=600$$



მაშასადამე ჩვენ მოვძებნეთ $x=600$ წერტილი, სადაც მარგინალური ამონაგების და მარგინალური დანახარჯების ფუნქციები ტოლია. ეხლა შევამოწმოთ (4) უტოლობა, ამისათვის გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებულები:

$$R''(x)=-\frac{1}{10} \qquad C''(x)=-\frac{1}{100}$$

ცხადია, რომ $R''(x_0)<C''(x_0)$, ამიტომ $x=600$ არის $P(x)$ მოგების ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და მაშასადამე, თუ გაიყიდება პროდუქციის 600 ერთეული, მაშინ ფირმის მოგება იქნება მაქსიმალური და იგი რიცხობრივად ტოლი იქნება:

$$P(600)=R(600)-C(600)=$$

$$=60\cdot 600-\frac{600^2}{20}-(2400+6\cdot 600-\frac{600^2}{200})=10200$$

პრაქტიკაში საკმაოდ გამოყენებადია გამოყენებითი ოპტიმიზაციის ისეთი ამოცანები, სადაც უმცირესი რაოდენობის მასალით უნდა დამზადდეს რაც შეიძლება დიდი მოცულობის მქონე სხეული. (ნატროშვილი და სხვა, 2008:354). ვთქვათ გვაქვს ასეთი ამოცანა:

ამოცანა 4. რა უმცირესი რაოდენობის მასალაა საჭირო 2 ლიტრი მოცულობის ცილინდრული ქილის დასამზადებლად?

ამოხსნა: ვთქვათ ცილინდრის ფორმის ჭურჭლის ფუძის რადიუსია R, ხოლო სიმაღლე H. თუ R და H სანტიმეტრებშია გაზომილი, მაშინ მოცულობა ტოლია:

$$\pi R^2 H=2000 \qquad (5)$$

ზედაპირის ფართობი კი $S=2\pi R^2+2\pi RH$

როგორ გავიგოთ ფრაზა „უმცირესი რაოდენობის მასალა"? პირველ რიგში უგულებელვყოთ თუნუქის ფურცლის სისქე და დამზადებისას წარმოშობილი ნარჩენები. (5) ტოლობიდან განვსაზღვროთ H და ზედაპირის ფართობი წარმოვადგინოთ როგორც ერთი ცვლადის ფუნქცია.

$$H=\frac{2000}{\pi R^2} \qquad (6)$$

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH =$$
$$= 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{2000}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{4000}{R}$$

ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები, ამისათვის გამოვთვალოთ S-ის წარმოებული R-ის მიმართ:

$$S^{/} = \left(2\pi R^2 + \frac{4000}{R}\right)^{/} = 4\pi R - \frac{4000}{R^2}$$

და გავუტოლოთ 0-ს:

$$4\pi R - \frac{4000}{R^2} = 0$$
$$R^3 = \frac{4000}{4\pi} = \frac{1000}{\pi}$$
$$R = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

გავარკვიოთ რა ხდება როცა $R = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$, ამისათვის გამოვთვალოთ S-ის მეორე რიგის წარმოებული:

$$S^{//} = \left(4\pi R - \frac{4000}{R^2}\right)^{/} = 4\pi + \frac{8000}{R^3} > 0$$

ამიტომ კრიტიკული წერტილი, რომელიც ვიპოვეთ არის მინიმუმის წერტილი. R-ის ამ მნიშვნელობის ჩასმით (6) ფორმულაში მივიღებთ:

$$H = \frac{2000}{\pi R^2} = \frac{2000\sqrt[3]{\pi^2}}{100\pi} = \frac{20}{\sqrt[3]{\pi}} = 2R$$

ამრიგად, უმცირესი რაოდენობის მასალა ცილინდრული ფორმის ჭურჭლის მისაღებად დაიხარჯება თუ სიმაღლეს ფუძის რადიუსზე 2-ჯერ მეტს ავიღებთ. (Thomas G.B., Weir M.D., Hass J., Thomas' Calculus, Early transcental.2014).

დასკვნა:

სტატიაში განხილულია თუ როგორ გამოიყენება ფუნქციის წარმოებული გარკვეული ტიპის ეკონომიკურ ამოცანებში, რომელთა ამოხსნისა და გაანალიზებისთვის საჭიროა მათემატიკური მიდგომების ცოდნა. ამის გამო ეკონომიკური პრობლემების სიღრმისეულად შესწავლით დაინტერესებული სტუდენტი მიხვდება შეთავაზებული მათემატიკური მეთოდების დაუფლების აუცილებლობას.

რამდენიმე ეკონომიკური შინაარსის ამოცანა სტატიაში დაწვრილებითაა ამოხსნილი და გაანალიზებული, რაც ახალისებს სტუდენტს და ადვილად ასათვისებელს ხდის მასალას. ამავდროულად, ასეთი შინაარსის ამოცანების დამოუკიდებლად ამოხსნა დიდად დაეხმარება სტუდენტს პრაქტიკული ამოცანების ოპტიმალურად გადაჭრის უნარ-ჩვევების გამომუშავებაში.

ლიტერატურა:

1. Thomas G.B., Weir M.D., Hass J., (2014) Thomas' Calculus, Early Transcendental. Thirteenth Edition, Pearson, New York.
2. ნატროშვილი დ., და სხვა (2008) მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. მეორე გამოცემა, თბილისი, „ახალი ივირონი", -577 გვ.;
3. ჯეიმზი გ., (2001), მათემატიკა ინჟინრებისათვის. (ქართული თარგმანი სახელმძღვანელოსი: JamesG., Burley D., Clements D., Dyke P., Searl J., Wright J., Modern Engineering Mathematics, Fifth Edition, Pearson, New York, 2015, ISBN 978-1-292-08082-6; რედაქტორები: დ.ნატროშვილი და ო.ზუმბურიძე). თბ., „გლობალ-პრინტი". -892გვ.
4. ხვედელიძე ნ., (2014) მათემატიკა ეკონომიკის და ბიზნესისთვის. თბილისი. -468გვ.